Leçon 261 - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Cadre : Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Définitions, premières propriétés. —

- Def+Pro : On appelle fonction caractéristique d'une v.a. réelle X la fonction $\varphi_X(t) := E[e^{itX}] = E[cos(tX)] + iE[sin(tX)]$.
  p_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Rem : La fonction caractéristique d'un v.a. est la transformée de Fourier de sa loi de probabilité. (composée avec $t \mapsto -t$)
- Rem : Si X est une v.a. de loi discrète $\sum_{r\in I} p_r\delta_r$, alors $\varphi_X(t) = \sum_{r\in I} p_r e^{itr}$, où I est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et $\sum_r p_r = 1$.
  Si X est une v.a. à densité, de densité f_X, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx$. (transformée de Fourier de f_X composée avec $t \mapsto -t$)
- Rem : Si X est une v.a. dans $\mathbb{R}^d$, sa fonction caractéristique est la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi_X(t) := E[e^{i<t,X>}]$, pour $< .,. >$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$.
- Ex : Si X est de loi de Bernouilli de paramètre p, alors $\varphi_X(t) = pe^{it} + (1 - p)$.
  Si X est de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
  Si X est de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
- Pro : i) φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
  ii) φ_X est bornée par $|\varphi_X(0)| = 1$.
  iii) φ_X est une fonction hermitienne : $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
  iv) Si φ_X est réelle, alors elle est paire.
  v) Si la loi de X est symétrique, alors φ_X est une fonction réelle.
  vi) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$, $\forall a, b, t \in \mathbb{R}$.
- Ex : Si $X \sim N(0, 1)$, alors φ_X est paire, car la densité de la loi $N(0, 1)$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, qui est paire.
- Rem : De façon analogue, on peut écrire les propriétés i) à v) en dimension d.
  En dimension d, la propriété *vi)* se réécrit : $\varphi_{AX+b} = e^{i<t,b>}\varphi_X(A^t t)$, $\forall t, b \in \mathbb{R}^d$, $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$. Ex : Une v.a. $X = (X_1, .., X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien ssi sa fonction caractéristique s'écrit $\varphi_X(t) = e^{i<t,M> - \frac{1}{2}<t,C.t>}$, où $M = (E[X_1], .., , E[X_d])$ et $C = (Cov(X_i, X_j))_{i,j}$.
- Thm : Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction caractéristique ssi :
  i) $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$
  ii) φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
  iii) φ est de type positif, càd $\forall t_1, .., t_d$, la matrice des $(\varphi(t_i - t_j))_{i,j}$ est hermitienne positive.
- Pro : Si deux v.a. X et Y ont la même fonction caractéristique, alors X et Y ont même loi.
  On dit que la fonction caractéristique de X caractérise la loi de X.
- Thm (Formule d'inversion de Fourier) Soit X v.a. rélle telle que φ_X est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors X est une v.a. à densité, de densité f_X continue bornée donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_X(t)dt$.
- Rem : Ce résultat se généralise sur $\mathbb{R}^d$ avec $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}} e^{-i<t,x>}\varphi_X(t)dt$
- Ex : Pour $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (Loi de Laplace), on a $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$, et on peut retrouver f_X avec la transformée de Fourier de φ_X.

2. Indépendance et moments. —

1. *Indépendance.* —

-

2. *Moments et dérivabilité.* —

- **Dev** : (Liens entre fonction caractéristique et moments) Soit X une v.a. réelle et φ_X sa fonction caractéristique.
  Si X admet un moment d'ordre k, alors φ_X est de classe C^k, avec $\varphi_X^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{iXt}]$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, Si φ_X est de classe C^k, alors X a un moment d'ordre $2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$.
- Cor : Si X a un moment d'ordre n, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k}{k!}E[X^k] + \frac{(it)^n}{(n-1)!}E[X^n.\int_0^1 (1-u)^{n-1}e^{ituX}du]$.
- Ex : Pour $X \sim N(0, 1)$, φ_X est de classe C^∞, et $\varphi'_X(t) = -t\varphi_X(t)$.
  Ainsi, $\varphi_X(t) = exp(-\frac{t^2}{2})$.
- Rem : En général, la loi d'une v.a. n'est pas caractérisée par ses moments. Mais si φ_X est analytique, alors la loi de X est caractérisée par ses moments car ceux-ci caractérisent φ_X.
- Contre-ex : Soit X une v.a. réelle de loi $P_X := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ avec $a_k = a_{-k}$ et telle que $\sum_{k\geq 0} ka_k = +\infty$ ($a_k = \frac{3}{\pi^2}\frac{1}{k^2}$ par exemple). Alors sa fonction caractéristique φ_X est dérivable partout

3. Convergence en loi et TCL. —

1. *Convergence en loi et fonction caractéristique.* —

-
- **Dev** : Théorème de Lévy : X_n converge en loi vers X ssi φ_{X_n} converge simplement vers φ_X.
- App : Théorème Central de la Limite (Voir plus bas).

2. *Théorèmes limites.* —

-
- App : Théorème Central de la Limite : Soit X_n une suite de v.a. réelles iid ayant un moment d'ordre 2. Alors la suite $\frac{X_1 + .. + X_n - nE[X_1]}{\sqrt{var(X_1)n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Références

Ouvrard (Probas 1) :
Ouvrard (Probas 2) : Fonction caractéristique et moments d'une v.a.(Dev)
Barbe, Ledoux :
Zuily, Queffélec : Théorème de Lévy+TCL.(Dev)

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes